

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzell

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 13 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
4. Februar 2022

Aufgabe 1 (jeweils 2 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_a^b x^3 e^x dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$, (ii) $\int_0^a x \arctan x dx$ für $a > 0$,

(iii) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ für $a, b > 1$, (iv) $\int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x) dx$ für $a, \lambda, \omega > 0$,

(v) $\int_0^a \arcsin x dx$ für $0 < a < 1$.

Lösung. (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Dreimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_a^b x^3 e^x dx &= x^3 e^x \Big|_{x=a}^b - \int_a^b 3x^2 e^x dx \\ &= x^3 e^x \Big|_{x=a}^b - \left(3x^2 e^x \Big|_{x=a}^b - \int_a^b 6x e^x dx \right) \\ &= x^3 e^x \Big|_{x=a}^b - 3x^2 e^x \Big|_{x=a}^b + \left(6x e^x \Big|_{x=a}^b - \int_a^b e^x dx \right) \\ &= x^3 e^x \Big|_{x=a}^b - 3x^2 e^x \Big|_{x=a}^b + 6x e^x \Big|_{x=a}^b - e^x \Big|_{x=a}^b. \end{aligned}$$

(ii) Sei $a > 0$ gegeben. Wir integrieren wieder partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^a x \arctan x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_{x=0}^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arctan a - \frac{1}{2} \int_0^a 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arctan a - \frac{1}{2} (x - \arctan x) \Big|_{x=0}^a \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + 1) \arctan a - \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 1$ gegeben. Wir substituieren

$$x = \cosh t, \quad dx = \sinh t dt, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$$

($\cosh: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ ist bijektiv) und erhalten

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \frac{\sinh t}{\sinh t} dt = \operatorname{arcosh} b - \operatorname{arcosh} a = \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right).$$

(iv) Seien $a, \lambda, \omega > 0$ gegeben. Wir integrieren zweimal partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x) dx &= \frac{e^{-\lambda x} \sin(\omega x)}{\omega} \Big|_{x=0}^a + \frac{\lambda}{\omega} \int_0^a e^{-\lambda x} \sin(\omega x) dx \\ &= \frac{e^{-\lambda a} \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{\lambda}{\omega} \left(-\frac{e^{-\lambda x} \cos(\omega x)}{\omega} \Big|_{x=0}^a - \frac{\lambda}{\omega} \int_0^a e^{-\lambda x} \cos(\omega x) dx \right). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir das gesuchte Integral als I , so folgt aus der obigen Rechnung

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{-\lambda a} \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{\lambda (1 - e^{-\lambda a} \cos(\omega a))}{\omega^2} - \frac{\lambda^2}{\omega^2} I \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)} \left(\frac{e^{-\lambda a} \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{\lambda (1 - e^{-\lambda a} \cos(\omega a))}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2 + \lambda^2} (\omega e^{-\lambda a} \sin(\omega a) - \lambda e^{-\lambda a} \cos(\omega a) + \lambda). \end{aligned}$$

(v) Sei $0 < a < 1$ gegeben. Wir verwenden auch hier wieder partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^a \arcsin x dx &= x \arcsin x \Big|_{x=0}^a - \int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= a \arcsin a + \sqrt{1-x^2} \Big|_{x=0}^a \\ &= a \arcsin a + \sqrt{1-a^2} - 1. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (10 Punkte). Entscheiden Sie jeweils, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale konvergieren:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, & \text{(ii)} \quad & \int_0^\infty \sin(x^\alpha) dx, \\ \text{(iii)} \quad & \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, & \text{(iv)} \quad & \int_0^\infty \cos(x^\alpha) dx. \end{aligned}$$

Lösung. (i) Konvergenz (und sogar der genaue Wert) des uneigentlichen Integrals für $\alpha = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt. Wir betrachten die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad \text{und} \quad \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

separat. Das ursprüngliche Integral konvergiert per Definition genau dann, wenn beide der obigen Integrale konvergieren. Der Wert 1 für die obere Grenze des ersten Integrals bzw. π für die untere Grenze des zweiten Integrals sind dabei jeweils willkürlich und zum Vereinfachen der Rechnungen gewählt (auf jedem Teilintervall $[a, b] \subset]0, \infty[$ ist der Integrand stetig und damit Riemann-integrierbar im üblichen Sinn).

Betrachten wir zunächst das Integral $\int_0^1 (\sin x)/x^\alpha dx$. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < 1$ gilt wegen $|\sin x| \leq |x|$, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 0,$$

also lässt sich die Funktion $x \mapsto \sin x/x^\alpha$ für solche α stetig in 0 fortsetzen und das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

existiert als eigentliches bzw. “normales” Riemann-Integral.

Betrachten wir also den Fall $\alpha > 1$. Wir erinnern uns an die Ungleichungen aus Tutoriumsblatt 9, Aufgabe 2:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$$

für alle $x \in]0, 3[$. Für $0 < x \leq 1$ ist damit wegen $x^3 \leq x$ auch

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \geq \frac{5}{6}x.$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ folgt also

$$\int_\varepsilon^1 \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+2} (1 - \varepsilon^{-\alpha+2}) & \alpha \neq 2, \\ -\log \varepsilon & \alpha = 2. \end{cases} \quad (1)$$

und

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \frac{5}{6} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx. \quad (2)$$

Aus (1) folgt absolute Konvergenz des Integrals für alle $\alpha < 2$ und damit nach Vorlesung auch Konvergenz. Aus (2) folgt Divergenz des Integrals für $\alpha \geq 2$. Zusammenfassend: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 2$.

Nun zum Integral $\int_\pi^\infty (\sin x)/x^\alpha dx$. Wir starten mit dem Fall $\alpha \leq 0$. Sei $R_n := n\pi$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $R_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\int_\pi^{R_n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right]. \quad (3)$$

für alle $n \geq 2$. Auf jedem Intervall $[k\pi, (k+1)\pi]$ hat die Sinusfunktion konstantes Vorzeichen, also gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jedes $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ein $\xi_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$ mit

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_k^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx = \frac{1}{\xi_k^\alpha} \cdot (-\cos x) \Big|_{x=k\pi}^{(k+1)\pi} = \frac{2}{\xi_k^\alpha} (-1)^k. \quad (4)$$

Da $\xi_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$, folgt auch $1/\xi_k^\alpha \rightarrow 0$ für $\alpha < 0$. Zudem gilt $1/\xi_k^\alpha = 1$ für $\alpha = 0$, also konvergiert in beiden Fällen der Ausdruck in (4) nicht gegen 0, womit die Reihe in (3) erst recht nicht konvergiert (für die Konvergenz einer Reihe ist es notwendig, dass die Summanden gegen 0 gehen).

Nun zum Fall $0 < \alpha < 1$. Wir untersuchen diesmal den Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^R \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

(der Einfachheit halber nehmen wir diesmal als untere Grenze $\pi/2$ statt π , dies spielt aber keine Rolle für die Existenz des Grenzwerts). Partielle Integration liefert für $R > \pi/2$

$$\int_{\pi/2}^R \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = -\frac{\cos x}{x^\alpha} \Big|_{x=\pi/2}^R - \alpha \int_{\pi/2}^R \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx = -\frac{\cos R}{R^\alpha} - \alpha \int_{\pi/2}^R \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Der erste Term konvergiert gegen 0, denn $\cos R$ ist beschränkt (durch 1). Der Grenzwert des zweiten Terms existiert ebenfalls, denn wegen

$$\int_{\pi/2}^R \left| \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \right| dx \leq \int_{\pi/2}^R \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx$$

konvergiert das Integral absolut und nach Vorlesung impliziert absolute Konvergenz die Konvergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals.

Es verbleibt der Fall $\alpha > 1$ (der Fall $\alpha = 1$ ist bekannt aus der Vorlesung). Hier können wir jedoch einfach direkt absolute Konvergenz folgern:

$$\int_{\pi/2}^R \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_{\pi/2}^R \frac{1}{x^\alpha} dx$$

und das rechte Integral konvergiert absolut für $\alpha > 1$.

Fassen wir unsere gesamten Untersuchungen dieser Aufgabe zusammen: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

konvergiert genau dann, wenn $0 < \alpha < 2$.

(ii) Im Fall $\alpha = 0$ ist das Integral trivialerweise nicht konvergent, sei also $\alpha \neq 0$. Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha > 0$. Seien $R > \varepsilon > 0$. Wir substituieren

$$y = x^\alpha, \quad dy = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dy.$$

Damit ist

$$\int_\varepsilon^R \sin(x^\alpha) dx = \alpha \int_{\varepsilon^\alpha}^{R^\alpha} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} dy.$$

Aus Teilaufgabe (i) folgt, dass das uneigentliche Riemann-Integral genau dann konvergiert, wenn $0 < (\alpha - 1)/\alpha < 2$, was sich zu $\alpha > 1$ umformen lässt.

Der Fall $\alpha < 0$ läuft analog, nur dass dann $R^\alpha < \varepsilon^\alpha$ ist und somit

$$\int_\varepsilon^R \sin(x^\alpha) dx = -\alpha \int_{R^\alpha}^{\varepsilon^\alpha} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} dy.$$

Die Konvergenzbedingung $0 < (\alpha - 1)/\alpha < 2$ ist also identisch, diesmal ergibt sich aber daraus $\alpha < -1$. Zusammenfassend: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \sin(x^\alpha) dx$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha < -1$ oder $\alpha > 1$.

(iii) Die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

für $\alpha > 0$ zeigt man genauso wie in Aufgabenteil (i). Wir müssen also nur noch

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

untersuchen, da sich der Cosinus anders als der Sinus nahe 0 verhält. Für $\alpha \leq 0$ ist der Integrand stetig auf $[0, 1]$, also im eigentlichen Sinne Riemann-integrierbar. Sei also $\alpha > 0$. Wir nutzen nun wieder eine Ungleichung aus Tutoriumsblatt 9, Aufgabe 2: Für alle $x \in]0, 3[$ ist

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$$

woraus für $0 < x \leq 1$ folgt, dass

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ folgt also

$$\int_{\varepsilon}^1 \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right| dx \leq \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} (1 - \varepsilon^{-\alpha+1}) & \alpha \neq 1, \\ -\log \varepsilon & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5)$$

und

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx > \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx. \quad (6)$$

Aus (5) folgt absolute Konvergenz des Integrals für alle $\alpha < 1$ und damit nach Vorlesung auch Konvergenz. Aus (6) folgt Divergenz des Integrals für $\alpha \geq 1$. Zusammenfassend: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 1$. Daraus folgt Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

genau dann, wenn $0 < \alpha < 1$.

(iv) Die gleiche Argumentation wie in (ii) führt zur Tatsache, dass

$$\int_0^{\infty} \cos(x^\alpha) dx$$

genau dann konvergiert, wenn $0 < (\alpha - 1)/\alpha < 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha > 1$. $\square$

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(i) $\int_a^b \frac{1}{x^3 - 1} dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-1, 1 \notin [a, b]$,

(ii) $\int_0^a \frac{16}{x^4 + 4} dx$ für $a > 0$.

Hinweis: Schreiben Sie $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, machen Sie den Ansatz

$$\frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

und bestimmen Sie A, B und C . Für Aufgabenteil (ii) können Sie ähnlich vorgehen.

Lösung. (i) Dem Hinweis folgend suchen wir $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Multiplizieren mit $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ liefert

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + A - C.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ A - B + C &= 0, \\ A - C &= 1, \end{aligned}$$

welches die eindeutige Lösung

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}$$

besitzt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x^3 - 1} dx &= \frac{1}{3} \int_a^b \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{3} \int_a^b \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x - 1| \Big|_{x=a}^b - \frac{1}{3} \int_a^b \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx. \end{aligned}$$

Es verbleibt also, das rechte Integral zu berechnen. Dazu formen wir weiter um:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \int_a^b \frac{3}{x^2 + x + 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| \Big|_{x=a}^b + \frac{3}{2} \int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| \Big|_{x=a}^b + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int_a^b \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| \Big|_{x=a}^b + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{x=a}^b. \end{aligned}$$

Setzen wir alle Rechnungen zusammen, erhalten wir

$$\int_a^b \frac{1}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \ln|x - 1| \Big|_{x=a}^b - \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| \Big|_{x=a}^b - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{x=a}^b.$$

(ii) Wir probieren zunächst wieder, den Nenner zu faktorisieren (Bemerkung: Wir wissen, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten als Produkt von Polynomen mit reellen Koeffizienten, deren Grad höchstens 2 ist, geschrieben werden kann). In der Tat ist

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Von Teilaufgabe (i) inspiriert machen wir nun den Ansatz

$$\frac{16}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}.$$

Gleiches Vorgehen wie vorher führt zu den Lösungen

$$Ax + B = 2x + 4, \quad Cx + D = -(2x - 4),$$

also

$$\begin{aligned} \frac{16}{x^4 + 4} &= \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(x - 1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Das Integral des obigen Ausdrucks lässt sich nun leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{16}{x^4 + 4} dx \\ &= \left[\ln(x^2 + 2x + 2) - \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \arctan(x + 1) + \arctan(x - 1) \right] \Big|_{x=0}^a \\ &= \ln(a^2 + 2a + 2) - \ln(a^2 - 2a + 2) + 2 \arctan(a + 1) + \arctan(a - 1). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte). (i) Beweisen Sie folgende Verbesserung des Integralvergleichskriteriums: Es sei $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f \geq 0$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Differenzen

$$a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

und für den Grenzwert gilt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1).$$

(ii) Zeigen Sie: Die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

besitzt einen Grenzwert $\gamma \in [0, 1]$.

Bemerkung: Die Zahl γ heißt *Euler-Mascheroni-Konstante*. Es ist bis heute nicht bekannt, ob γ rational, irrational oder sogar transzendent ist.

Lösung. Da f monoton fällt, gilt

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k) dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dx = f(k+1) \quad (7)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (präzise Argumentation via Treppenfunktionen wie in der Vorlesung) und damit

$$a_n - a_{n-1} = f(n) - \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$$

für alle $n \geq 2$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also monoton wachsend. Weiter folgt aus (7) die Einschließung

$$0 \leq a_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen konvergent ist, besitzt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert und mit dem Sandwichlemma folgt für diesen

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1).$$

Das war zu zeigen.

(ii) Setzen wir $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, so ist f monoton fallend und $f \geq 0$. Weiter ist

$$\int_1^{n+1} f(x) dx = \ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Teilaufgabe (i), dann ist

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} f(x) dx \right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = a_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right). \quad (8)$$

Nach Teilaufgabe (i) konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt $0 \leq a_n \leq f(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln((n+1)/n) = 0$ konvergiert auch der Ausdruck in (8) und es gilt

$$0 \leq \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 1,$$

wie gewünscht. □